

第1章 | 式と証明



第1節 式と計算

1 3次式の展開と因数分解

まとめ

1 展開の公式

$$1 \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$2 \quad (a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$$

2 因数分解の公式

展開の公式2を逆に利用する因数分解は次のようになる。

$$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

A 3次式の展開の公式

教 p.9

練習

1

次の式を展開せよ。

$$(1) \quad (x+2)^3$$

$$(2) \quad (x-1)^3$$

$$(3) \quad (3a+b)^3$$

$$(4) \quad (x-2y)^3$$

指針 公式1による展開(和の3乗・差の3乗) 展開の公式1を用いて、式を展開・整理する。(3)は $3a$ を1つの文字とみなし、(4)は $2y$ を1つの文字とみなして公式にあてはめる。

解答 (1) $(x+2)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3$

$$= x^3 + 6x^2 + 12x + 8 \quad \text{答}$$

$$(2) \quad (x-1)^3 = x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 1 + 3 \cdot x \cdot 1^2 - 1^3$$

$$= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \quad \text{答}$$

$$(3) \quad (3a+b)^3 = (3a)^3 + 3 \cdot (3a)^2 \cdot b + 3 \cdot 3a \cdot b^2 + b^3$$

$$= 27a^3 + 27a^2b + 9ab^2 + b^3 \quad \text{答}$$

$$(4) \quad (x-2y)^3 = x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 2y + 3 \cdot x \cdot (2y)^2 - (2y)^3$$

$$= x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3 \quad \text{答}$$

練習
2

教 p.9

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

上の公式が成り立つことを、左辺を展開して確かめよ。

指針 公式の証明 分配法則を利用して左辺を展開し、同類項をまとめる。

解答

$$\begin{aligned}(a+b)(a^2-ab+b^2) \\&=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3 \\&=a^3+b^3\end{aligned}$$

よって $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ 終

$$\begin{aligned}(a-b)(a^2+ab+b^2) \\&=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3 \\&=a^3-b^3\end{aligned}$$

よって $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$ 終

練習
3

教 p.9

次の式を展開せよ。

(1) $(x+2)(x^2-2x+4)$

(2) $(x-3)(x^2+3x+9)$

(3) $(x+3y)(x^2-3xy+9y^2)$

(4) $(2x-a)(4x^2+2ax+a^2)$

指針 公式 2 による展開 (3 乗の和・3 乗の差になる) 展開の公式 2 を用いて、式を展開・整理する。(3) は $3y$ を 1 つの文字とみなし、(4) は $2x$ を 1 つの文字とみなす。

解答

$$\begin{aligned}(1) \quad (x+2)(x^2-2x+4) &= (x+2)(x^2-x \cdot 2+2^2) \\&= x^3+2^3 \\&= x^3+8 \quad \text{答}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \quad (x-3)(x^2+3x+9) &= (x-3)(x^2+x \cdot 3+3^2) \\&= x^3-3^3 \\&= x^3-27 \quad \text{答}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) \quad (x+3y)(x^2-3xy+9y^2) &= (x+3y)\{x^2-x \cdot 3y+(3y)^2\} \\&= x^3+(3y)^3 \\&= x^3+27y^3 \quad \text{答}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4) \quad (2x-a)(4x^2+2ax+a^2) &= (2x-a)\{(2x)^2+2x \cdot a+a^2\} \\&= (2x)^3-a^3 \\&= 8x^3-a^3 \quad \text{答}\end{aligned}$$

B 3 次式の因数分解

教 p.10

練習
4

次の式を因数分解せよ。

(1) $x^3 - 1$

(2) $x^3 + 27a^3$

(3) $x^3 - 64$

(4) $125x^3 - y^3$

指針 因数分解の公式 次の公式にあてはめる。

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

(2) では, $27a^3 = (3a)^3$ とみる。(4) では, $125x^3 = (5x)^3$ とみる。解答 (1) $x^3 - 1 = x^3 - 1^3 = (x - 1)(x^2 + x \cdot 1 + 1^2)$

$$= (x - 1)(x^2 + x + 1) \quad \text{答}$$

(2) $x^3 + 27a^3 = x^3 + (3a)^3 = (x + 3a)\{x^2 - x \cdot 3a + (3a)^2\}$

$$= (x + 3a)(x^2 - 3ax + 9a^2) \quad \text{答}$$

(3) $x^3 - 64 = x^3 - 4^3 = (x - 4)(x^2 + x \cdot 4 + 4^2)$

$$= (x - 4)(x^2 + 4x + 16) \quad \text{答}$$

(4) $125x^3 - y^3 = (5x)^3 - y^3 = (5x - y)\{(5x)^2 + 5x \cdot y + y^2\}$

$$= (5x - y)(25x^2 + 5xy + y^2) \quad \text{答}$$

練習
5

次の式を因数分解せよ。

(1) $x^6 - 1$

(2) $a^6 - 64b^6$

教 p.10

指針 因数分解の公式の利用 $A^6 - B^6 = (A^3)^2 - (B^3)^2$ と考えて, 2 乗の差の因数分解の公式や 3 乗の和や差の因数分解の公式を利用する。因数分解は, 途中で止めないで, 因数分解できるところまですること。解答 (1) $x^6 - 1 = (x^3)^2 - 1^2 = (x^3 + 1)(x^3 - 1)$

$$= (x + 1)(x^2 - x \cdot 1 + 1^2)(x - 1)(x^2 + x \cdot 1 + 1^2)$$

$$= (x + 1)(x - 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) \quad \text{答}$$

(2) $a^6 - 64b^6 = (a^3)^2 - (8b^3)^2 = (a^3 + 8b^3)(a^3 - 8b^3)$

$$= (a + 2b)\{a^2 - a \cdot 2b + (2b)^2\}(a - 2b)\{a^2 + a \cdot 2b + (2b)^2\}$$

$$= (a + 2b)(a - 2b)(a^2 - 2ab + 4b^2)(a^2 + 2ab + 4b^2) \quad \text{答}$$

別解 (1) $x^6 - 1 = (x^2)^3 - 1^3 = (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)$

$$= (x^2 - 1)\{(x^4 + 2x^2 + 1) - x^2\}$$

$$= (x^2 - 1)\{(x^2 + 1)^2 - x^2\}$$

$$= (x + 1)(x - 1)(x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x)$$

$$= (x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) \quad \text{答}$$

(2) $a^6 - 64b^6 = (a^2)^3 - (4b^2)^3 = (a^2 - 4b^2)(a^4 + a^2 \cdot 4b^2 + 16b^4)$

$$= (a^2 - 4b^2)\{(a^4 + 8a^2b^2 + 16b^4) - 4a^2b^2\}$$

$$\begin{aligned}
 &= (a^2 - 4b^2)\{(a^2 + 4b^2)^2 - (2ab)^2\} \\
 &= (a + 2b)(a - 2b)(a^2 + 4b^2 + 2ab)(a^2 + 4b^2 - 2ab) \\
 &= (a + 2b)(a - 2b)(a^2 - 2ab + 4b^2)(a^2 + 2ab + 4b^2) \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

教 p.10

深める

教科書の例題1を $x^6 - y^6 = (x^2)^3 - (y^2)^3$ と考えると因数分解してみよう。

指針 因数分解の公式の利用 教科書 p.10 の例題1では、 $x^6 - y^6 = (x^3)^2 - (y^3)^2$ と考え、まず、2乗の差の因数分解の公式を用いているが、ここでは、まず、3乗の差の因数分解の公式を用いて因数分解を進める。

解答 $x^6 - y^6 = (x^2)^3 - (y^2)^3 = (x^2 - y^2)\{(x^2)^2 + x^2y^2 + (y^2)^2\}$

$$\begin{aligned}
 &= (x^2 - y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4) \\
 &= (x^2 - y^2)\{(x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - x^2y^2\} \\
 &= (x^2 - y^2)\{(x^2 + y^2)^2 - (xy)^2\} \\
 &= (x + y)(x - y)(x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy) \\
 &= (x + y)(x - y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2) \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

2 二項定理

まとめ

1 $(a+b)^n$ の展開式

たとえば、 $(a+b)^4$ の展開式は、

$$(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b)$$

として、右の計算より

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

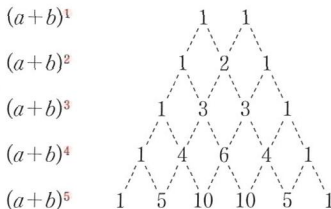
この計算で、各項の係数だけを取り出してみると、右のようになる。

2 パスカルの三角形

 $(a+b)^n$ の展開式の各項の係数を、 $n=1, 2, 3, 4, 5$ の場合について順に並べると、右の図のようになる。この三角形状の数の配列を **パスカルの三角形** という。

$$\begin{array}{r}
 a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
 \times) a + b \\
 \hline
 a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 \\
 \quad a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 \\
 \hline
 a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4
 \end{array}$$

	1	3	3	1	
$\times)$	1	1			
	1	3	3	1	
		1	3	3	1
	1	4	6	4	1



3 パスカルの三角形の性質

- 1 数の配列は左右対称で、各行の両端の数は1である。
- 2 2行目以降の両端以外の数は、左上と右上の数の和に等しい。

4 二項定理

$$(a+b)^n = {}_nC_0 a^n + {}_nC_1 a^{n-1} b + {}_nC_2 a^{n-2} b^2 + \cdots + {}_nC_r a^{n-r} b^r + \cdots + {}_nC_{n-1} a b^{n-1} + {}_nC_n b^n$$

二項定理における ${}_nC_r a^{n-r} b^r$ を、 $(a+b)^n$ の展開式の一般項といい、係数 ${}_nC_r$ を二項係数という。

5 パスカルの三角形と二項定理

パスカルの三角形は、 $(a+b)^n$ の展開式の二項係数 ${}_nC_r$ を取り出して順に並べたものである。

6 二項係数に関する等式

二項定理の等式 $(a+b)^n = {}_nC_0 a^n + {}_nC_1 a^{n-1} b + \cdots + {}_nC_n b^n$ において、 $a=1$, $b=x$ とすると

$$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 x + {}_nC_2 x^2 + \cdots + {}_nC_n x^n \quad \text{①}$$

等式①で、 $x=1$ とすると $2^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n$

A パスカルの三角形

練習
6

次の□に入る各数を、係数だけを取り出す計算によって求めよ。

$$(a+b)^5 = a^5 + \square a^4 b + \square a^3 b^2 + \square a^2 b^3 + \square a b^4 + b^5$$

指針 $(a+b)^5$ の展開式の係数 $(a+b)^5 = (a+b)^4(a+b)$ として、p.7のまとめの $(a+b)^4$ の展開式を使い、下の解答の右側のように、係数だけで計算する。

解答 $(a+b)^4$ の展開式の項の係数は、左の項から順に

1, 4, 6, 4, 1

よって、右のような係数だけを取り出す計算から、

□に入る数は次のようになる。

$$\begin{aligned} (a+b)^5 &= (a+b)^4(a+b) \\ &= a^5 + \boxed{5}a^4b + \boxed{10}a^3b^2 + \boxed{10}a^2b^3 + \boxed{5}ab^4 + b^5 \quad \text{答} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ \times) 1 \quad 1 \\ \hline 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ \hline 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \end{array}$$

練習
7

パスカルの三角形の性質を用いて、 $(a+b)^6$ の展開式の各項の係数の配列を求めよ。

指針 パスカルの三角形の性質 前問の練習6の $(a+b)^5$ の展開式の係数を利用し、次の性質を用いて計算する。

$r=3$ のとき、求める係数は

$${}_5C_3 \times (-2)^3 = -80 \quad \text{答}$$

教 p.13

深める

次のパスカルの三角形の性質 **1**, **2** を、二項係数 ${}_nC_r$ を用いて表してみよう。

- 1 数の配列は左右対称で、各行の両端の数は1である。
- 2 2行目以降の両端以外の数は、左上と右上の数の和に等しい。

指針 パスカルの三角形の性質を式に表す

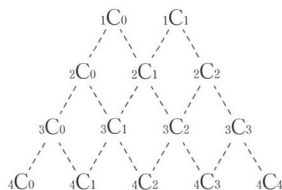
右のような図で考えるとよい。

- 1 たとえば、 ${}_4C_1 = {}_4C_3 (=4)$ より、

$${}_4C_1 = {}_4C_{4-1} \text{ である。}$$

- 2 たとえば、 ${}_3C_1 + {}_3C_2 = {}_4C_2$ より、

$${}_{4-1}C_{2-1} + {}_{4-1}C_2 = {}_4C_2 \text{ である。}$$



解答 (例) **1** 2以上の整数 n に対し ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$

$$(r=1, 2, \dots, n-1)$$

自然数 n に対し ${}_nC_0 = {}_nC_n = 1$ **終**

- 2 2以上の整数 n に対し ${}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$

$$(r=1, 2, \dots, n-1) \quad \text{終}$$

注意 **1** は、「自然数 n に対し ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ ($r=0, 1, \dots, n$)」のようにまとめて表現することもできる。

参考 これらの性質は、組合せの数 ${}_nC_r$ の性質でもあるから、組合せの数を求める問題でも利用できる。

C 二項定理の応用

教 p.14

練習
10

等式 ① を用いて、等式 ② を導け。

$$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + \dots + {}_nC_nx^n \quad \text{①}$$

$${}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - \dots + (-1)^n {}_nC_n = 0 \quad \text{②}$$

指針 二項定理に関する等式 まず ① の左辺と右辺を入れかえて、② の各辺の項を比較する。 ${}_nC_n$ を含む項に着目すると、 $x=-1$ とすればよいことがわかる。

解答 等式 ① より ${}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + \dots + {}_nC_nx^n = (1+x)^n$

この等式に $x=-1$ を代入すると

$${}_nC_0 + {}_nC_1(-1) + {}_nC_2(-1)^2 + \dots + {}_nC_n(-1)^n = (1-1)^n$$

$$\text{よって } {}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - \dots + (-1)^n {}_nC_n = 0 \quad \text{終}$$

練習
11 $(a+b+c)^6$ の展開式における次の項の係数を求めよ。

(1) a^3bc^2

(2) $a^2b^2c^2$

(3) a^2b^4

指針 二項定理と $(a+b+c)^n$ の展開 $(a+b+c)^n$ の展開式における $a^b b^r c^r$ の項の係数を求めるには

① $(a+b+c)^n = \{(a+b)+c\}^n$ とみて、まず c^r を含む項を考えると

$${}_nC_r(a+b)^{n-r}c^r$$

② 次に、 $(a+b)^{n-r}$ の展開式における $a^b b^r$ の項を調べる。

解答 (1) $(a+b+c)^6 = \{(a+b)+c\}^6$ の展開式において、 c^2 を含む項は

$${}_6C_2(a+b)^4c^2$$

$(a+b)^4$ の展開式において、 a^3b の項は ${}_4C_1a^3b$

よって、求める係数は

$${}_6C_2 \times {}_4C_1 = \frac{6!}{2!4!} \times \frac{4!}{3!} = \frac{6 \times 5}{2} \times 4 = 60 \quad \text{答}$$

(2) c^2 を含む項は、(1) から ${}_6C_2(a+b)^4c^2$

$(a+b)^4$ の展開式において、 a^2b^2 の項は ${}_4C_2a^2b^2$

よって、求める係数は

$${}_6C_2 \times {}_4C_2 = \frac{6 \times 5}{2} \times \frac{4!}{2!2!} = 15 \times \frac{4 \times 3}{2} = 90 \quad \text{答}$$

(3) $(a+b+c)^6 = \{(a+b)+c\}^6$ の展開式において、 $c^0=1$ を含む項は

$${}_6C_0(a+b)^6$$

$(a+b)^6$ の展開式において、 a^2b^4 の項は ${}_6C_4a^2b^4$

よって、求める係数は

$${}_6C_0 \times {}_6C_4 = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15 \quad \text{答}$$

深める

$2^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n$ の等式から、教科書 11 ページのパスカルの三角形において、どのようなことがいえるか説明してみよう。

解答 (例) n 行目にある数の総和は 2^n となる。 終

研究 $(a+b+c)^n$ の展開式

まとめ

 $(a+b+c)^n$ の展開式 $(a+b+c)^n$ の展開式における $a^p b^q c^r$ の項の係数は

$$\frac{n!}{p!q!r!} \quad \text{ただし} \quad p+q+r=n$$

練習
1 $(a+b+c)^{10}$ の展開式における $a^5 b^2 c^3$ の項の係数を求めよ。

教 p.15

指針 $(a+b+c)^n$ の展開式の項の係数 $\frac{n!}{p!q!r!}$ に $n=10$, $p=5$, $q=2$, $r=3$ を代入する。

解答 $\frac{10!}{5!2!3!} = 2520$ 答



深める

教 p.15

$(a+b+c)^n$ の展開式は、 n 個の $(a+b+c)$ のそれぞれから、 a , b , c のいずれかを取って掛け合わせた積の和になる。このことを利用して、 $(a+b+c)^n$ の展開式における $a^p b^q c^r$ の項の係数が $\frac{n!}{p!q!r!}$ と表されることを確かめよう。

指針 $(a+b+c)^n$ の展開式の項の係数 $(a+b+c)^n$ の展開式において、 $a^p b^q c^r$ の項は、 n 個の $(a+b+c)$ から a を取る p 個、 b を取る q 個、 c を取る r 個を選ぶことによりできる。

n 個の $(a+b+c)$ から p 個を選ぶ選び方の数は ${}_n C_p$ 、このおののに対し、残りの $(n-p)$ 個の $(a+b+c)$ から q 個を選ぶ選び方の数は $_{n-p} C_q$ だけある。

このとき、残りは、 $n-p-q=r$ (個) であるから、 c の指数は自動的に r となる。したがって、 $a^p b^q c^r$ の項の総数、すなわち $a^p b^q c^r$ の係数は ${}_n C_p \times {}_{n-p} C_q$ で求まる。

解答 $(a+b+c)^n$ の展開式における $a^p b^q c^r$ の項の係数は、 n 個の $(a+b+c)$ から、 a を取る p 個を選び、さらに残りの $(n-p)$ 個の $(a+b+c)$ から、 b を取る q 個を選ぶ組合せの総数に等しい。

よって、 $n-p-q=r$ に注意すれば

$${}_n C_p \times {}_{n-p} C_q = \frac{n!}{p!(n-p)!} \times \frac{(n-p)!}{q!(n-p-q)!} = \frac{n!}{p!q!r!} \quad \text{終}$$

3 多項式の割り算

1 章

式と証明

まとめ

多項式の割り算

A, B が同じ 1 つの文字についての多項式で、 B は 0 でないとする。このとき、 A を B で割った商と余りを求めるとは、次の等式を満たす多項式 Q, R を求めることである。

$$A=BQ+R$$

ただし、 R は 0 か、 B より次数の低い多項式

A, B に対して、 Q, R は 1 通りに定まり、 Q を 商、 R を 余り という。とくに、 $R=0$ すなわち $A=BQ$ のとき、 A は B で 割り切れる という。

注意 単項式は項が 1 つの多項式と考える。多項式のことを整式ともいう。

A 多項式の割り算

教 p.17

練習
12

次の多項式 A, B について、 A を B で割った商と余りを求めよ。

$$(1) \quad A=x^3-4x^2-5, \quad B=x-3$$

$$(2) \quad A=2x^3+5x^2-2x+4, \quad B=x^2-x+2$$

$$(3) \quad A=x^3-7x+6, \quad B=x^2-3+2x$$

指針 多項式の割り算 多項式 A を多項式 B で割るとき、次のことに注意する。

- 1 A, B を降べきの順に整理してから、割り算を行う。
- 2 余りが 0 になるか、余りの次数が割る式 B の次数より低くなるまで計算を続ける。
- 3 多項式 A に、ある次数の項がないときには、その項の場所を空けて計算するとよい。

解答 (1)

$$\begin{array}{r} x^2-x-3 \\ x-3 \overline{) x^3-4x^2-5} \\ \underline{x^3-3x^2} \\ -x^2 \\ \underline{-x^2+3x} \\ -3x-5 \\ \underline{-3x+9} \\ -14 \end{array}$$

← 割られる式に 1 次の項がないため、その場所を空けておく。

答 商 x^2-x-3 , 余り -14

(2)

$$\begin{array}{r} 2x+7 \\ x^2-x+2 \overline{) 2x^3+5x^2-2x+4} \\ \underline{2x^3-2x^2+4x} \\ 7x^2-6x+4 \\ \underline{7x^2-7x+14} \\ x-10 \end{array}$$

答 商 $2x+7$, 余り $x-10$

$$\begin{array}{r}
 (3) \quad \begin{array}{r} x-2 \\ x^2+2x-3 \overline{) x^3-7x+6} \\ \underline{x^3+2x^2-3x} \\ -2x^2-4x+6 \\ \underline{-2x^2-4x+6} \\ 0 \end{array}
 \end{array}$$

← 割る式を降べきの順に整理する。
割られる式に2次の項がないため、
その場所を空けておく。

答 商 $x-2$, 余り 0

1次式で割った余りは定数,
2次式で割った余りは1次式
か定数になるよ。



練習
13

多項式 x^3+4x^2+4x-2 を多項式 B で割ると、商が $x+3$ 、余りが $2x+1$ であるという。 B を求めよ。

教 p.18

指針 等式 $A=BQ+R$ の利用 $A=BQ+R$ にそれぞれの多項式を代入して整理する。

解答 この割り算について、次の等式が成り立つ。

$$x^3+4x^2+4x-2=B \times (x+3)+2x+1$$

$$\leftarrow A=x^3+4x^2+4x-2$$

$$Q=x+3, R=2x+1$$

整理すると

$$x^3+4x^2+2x-3=B \times (x+3)$$

よって、 x^3+4x^2+2x-3 は $x+3$ で割り切れて、
その商が B である。

右の計算により $B=x^2+x-1$ 答

$$\begin{array}{r}
 x^2+x-1 \\
 x+3 \overline{) x^3+4x^2+2x-3} \\
 \underline{x^3+3x^2} \\
 x^2+2x-3 \\
 \underline{x^2+3x} \\
 -x-3 \\
 \underline{-x-3} \\
 0
 \end{array}$$

練習
14

$A=6x^2-11ax-10a^2$, $B=3x+2a$ を、 x についての多項式とみて、
 A を B で割った商と余りを求めよ。

教 p.18

指針 2種類の文字を含む多項式の割り算 x についての多項式とみて割り算を行う。 a は数と同じように扱う。

解答

$$\begin{array}{r}
 2x-5a \\
 3x+2a \overline{) 6x^2-11ax-10a^2} \\
 \underline{6x^2+4ax} \\
 -15ax-10a^2 \\
 \underline{-15ax-10a^2} \\
 0
 \end{array}$$

← x についての多項式とみて、
 a は数と同じように扱う。

答 商 $2x-5a$, 余り 0

4 分数式とその計算

まとめ

1 分数式

2つの多項式 A, B によって $\frac{A}{B}$ の形に表され、 B に文字を含む式を、分数式という。分数式 $\frac{A}{B}$ において、 B をその 分母、 A をその 分子 という。

注意 与えられた分数式の分母は0でないとする。

2 分数式の約分

分数式では、その分母と分子に0でない同じ多項式を掛けても、分母と分子をその共通因数で割っても、もとの式と等しい。

$$\frac{A}{B} = \frac{AC}{BC} \quad (\text{ただし } C \neq 0), \quad \frac{AD}{BD} = \frac{A}{B}$$

分数式の分母と分子をその共通因数で割ることを 約分 するという。それ以上約分できない分数式を 既約分数式 という。

3 分数式の四則計算

$$\textcircled{1} \text{ 乗法・除法 } \frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}, \quad \frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC}$$

$$\textcircled{2} \text{ 加法・減法 } \frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A+B}{C}, \quad \frac{A}{C} - \frac{B}{C} = \frac{A-B}{C}$$

$\textcircled{3}$ 2つ以上の分数式の分母を同じ多項式にすることを 通分 するという。
分母が異なる分数式の加減は、数の場合と同様に通分して計算する。

注意 分数式の計算結果は既約分数式か多項式の形にしておく。

A 分数式の約分

教 p.19

練習
15

次の式を約分して、既約分数式で表せ。

$$(1) \frac{15ab^4}{6a^3b^2} \quad (2) \frac{x^2-9}{x^2+7x+12} \quad (3) \frac{x^2-2x-3}{2x^2-7x+3}$$

指針 分数式の約分 分数式の分母と分子をその共通因数で割る。

(2), (3) まず、分母と分子をそれぞれ因数分解する。

解答 (1) $\frac{15ab^4}{6a^3b^2} = \frac{5b^2 \cdot 3ab^2}{2a^2 \cdot 3ab^2} = \frac{5b^2}{2a^2}$ **答**

(2) $\frac{x^2-9}{x^2+7x+12} = \frac{(x+3)(x-3)}{(x+3)(x+4)} = \frac{x-3}{x+4}$ **答**

(3) $\frac{x^2-2x-3}{2x^2-7x+3} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-3)(2x-1)} = \frac{x+1}{2x-1}$ **答**

B 分数式の四則計算

教 p.20

練習
16

次の式を計算せよ。

$$(1) \frac{2x}{2x+1} \times \frac{2x^2-3x-2}{x-2} \qquad (2) \frac{x-2}{x^2+3x} \div \frac{x^2-2x}{x^2-9}$$

指針 分数式の乗法・除法 まず、分母や分子で因数分解できるものがあれば、因数分解しておく。

(2) 割る分数式の逆数を掛ける。

解答 (1) $\frac{2x}{2x+1} \times \frac{2x^2-3x-2}{x-2} = \frac{2x \times (x-2)(2x+1)}{(2x+1) \times (x-2)} = 2x$ 答

(2) $\frac{x-2}{x^2+3x} \div \frac{x^2-2x}{x^2-9} = \frac{x-2}{x(x+3)} \times \frac{(x+3)(x-3)}{x(x-2)}$
 $= \frac{(x-2)(x+3)(x-3)}{x^2(x+3)(x-2)} = \frac{x-3}{x^2}$ 答

練習
17

次の式を計算せよ。

$$(1) \frac{2x}{x+3} + \frac{x+9}{x+3} \qquad (2) \frac{3x+1}{2x-1} - \frac{2x-3}{2x-1}$$

$$(3) \frac{2x^2}{x-1} - \frac{x+1}{x-1}$$

指針 分母が同じ分数式の加法・減法 分数の場合と同じように計算し、結果はそれ以上約分できない形にしておく。

(2), (3) の減法では、引く方の分子をカッコ書きにして符号のミスを防ぐ。

解答 (1) $\frac{2x}{x+3} + \frac{x+9}{x+3} = \frac{2x+(x+9)}{x+3} = \frac{3x+9}{x+3}$
 $= \frac{3(x+3)}{x+3} = 3$ 答

(2) $\frac{3x+1}{2x-1} - \frac{2x-3}{2x-1} = \frac{3x+1-(2x-3)}{2x-1}$
 $= \frac{x+4}{2x-1}$ 答

(3) $\frac{2x^2}{x-1} - \frac{x+1}{x-1} = \frac{2x^2-(x+1)}{x-1} = \frac{2x^2-x-1}{x-1}$
 $= \frac{(x-1)(2x+1)}{x-1} = 2x+1$ 答

指針 恒等式 式変形によって導かれる等式は、恒等式である。それぞれの等式の左辺を変形して調べる。

解答 (1) 左辺を展開すると右辺になるから、恒等式である。

$$(2) \text{ 左辺} = x^2 - x + x = x^2$$

右辺と同じ式にならないから、恒等式ではない。

$$(3) \text{ 左辺} = \frac{x+1}{x(x+1)} + \frac{x}{x(x+1)} = \frac{2x+1}{x(x+1)}$$

右辺と同じ式にならないから、恒等式ではない。

$$(4) \text{ 左辺} = \frac{x+2}{x(x+2)} - \frac{x}{x(x+2)} = \frac{2}{x(x+2)}$$

右辺と同じ式となるから、恒等式である。

以上から、恒等式であるのは (1), (4) **答**

注意 (2) から導かれる等式 $x^2 = 2x$ は、 $x=0$ または $x=2$ を代入したときに限り成り立つ方程式である。(3) も、分母をはらって整理すると方程式 $2x^2 + 2x + 1 = 0$ であるが、実数の解はもたない(第2章以降で学習)。

なお、恒等式でないことを示すには、次のような方法もある。(2) の場合は

$$(2) \ x=1 \text{ とすると } \text{左辺}=1, \text{ 右辺}=2$$

この等式は成り立たないから、恒等式ではない。

B 恒等式の性質

教 p.23

練習
21

等式 $2x^2 - 7x + 8 = (x-3)(ax+b) + c$ が x についての恒等式となるように、定数 a, b, c の値を定めよ。

指針 恒等式の性質 まず、右辺を x について降べきの順に整理する。恒等式であるとき、両辺の同じ次数の項の係数は、それぞれ等しい。

解答 等式の右辺を x について整理すると

$$2x^2 - 7x + 8 = ax^2 + (-3a+b)x + (-3b+c)$$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$$2 = a \quad \cdots \cdots \text{①}, \quad -7 = -3a + b \quad \cdots \cdots \text{②}, \quad 8 = -3b + c \quad \cdots \cdots \text{③}$$

$$\text{①を②に代入すると } -7 = -6 + b \quad \text{よって } b = -1$$

$$\text{これを③に代入すると } 8 = 3 + c \quad \text{よって } c = 5$$

$$\text{したがって } a=2, \ b=-1, \ c=5 \quad \text{答}$$

教 p.24

練習
22

等式 $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$ が x についての恒等式となるように、定数 a, b の値を定めよ。

指針 分数式の恒等式 分数式の恒等式では、分母をはらって得られる等式もまた恒等式である。このことを利用する。

解答 与えられた等式が x についての恒等式ならば、等式の両辺に $x(x+1)$ を掛けて得られる等式

$$1 = a(x+1) + bx$$

も x についての恒等式である。

右辺を x について整理すると

$$1 = (a+b)x + a \quad \leftarrow \text{左辺} = 0 \cdot x + 1$$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$$0 = a + b, \quad 1 = a$$

これを解いて $a = 1, b = -1$ **答**

研究 代入による恒等式の係数決定

まとめ

1 係数比較法

教科書 p.23 のように、両辺の同じ次数の項の係数を比較して、恒等式の係数を定める方法を係数比較法という。

2 数値代入法

x についての恒等式では、両辺の値が存在する限り、 x にどのような値を代入してもその等式は成り立つ。このことを用いて、恒等式の係数を定める方法を数値代入法という。

練習 1

教 p.24

等式 $x+2 = ax(x-1) + b(x-1)(x-2) + c(x-2)x$ が x についての恒等式となるように、定数 a, b, c の値を定めよ。

指針 数値代入法 等式の両辺に、たとえば $x=0, x=1, x=2$ をそれぞれ代入すると、 a, b, c の1次方程式ができ、それを解くと a, b, c の値が求められる。この値は必要条件であり、十分条件でもあることの確認が必要。

解答 等式の両辺の x に $0, 1, 2$ をそれぞれ代入すると

$$2 = 2b, \quad 3 = -c, \quad 4 = 2a$$

これを解くと $a = 2, b = 1, c = -3$ **← 必要条件**

逆に、これらの値を右辺に代入し整理すると左辺と一致し、与えられた等式は x についての恒等式である。 **← 十分条件でもあることの確認**

よって $a = 2, b = 1, c = -3$ **答**

練習
18

次の式を計算せよ。

(1) $\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2}$

(2) $\frac{x}{x-1} - \frac{1}{x^2-x}$

(3) $\frac{x}{x+1} + \frac{3x-1}{x^2-2x-3}$

(4) $\frac{3x+5}{x^2-1} - \frac{1}{x^2+x}$

指針 分母が異なる分数式の加法・減法 通分してから計算する。

(2) $x^2-x=x(x-1)$ から, 2つの分数の分母は $x(x-1)$ にそろえる。(4) 分母がそれぞれ $x^2-1=(x+1)(x-1)$, $x^2+x=x(x+1)$ と因数分解できるから, 2つの分数の分母は $x(x+1)(x-1)$ にそろえる。

$$\begin{aligned} \text{解答 (1)} \quad \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2} &= \frac{2(x-2)}{(x+1)(x-2)} + \frac{3(x+1)}{(x+1)(x-2)} \\ &= \frac{2(x-2)+3(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{5x-1}{(x+1)(x-2)} \quad \text{答} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(2)} \quad \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x^2-x} &= \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x(x-1)} = \frac{x^2}{x(x-1)} - \frac{1}{x(x-1)} \\ &= \frac{x^2-1}{x(x-1)} = \frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)} = \frac{x+1}{x} \quad \text{答} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(3)} \quad \frac{x}{x+1} + \frac{3x-1}{x^2-2x-3} &= \frac{x}{x+1} + \frac{3x-1}{(x+1)(x-3)} \\ &= \frac{x(x-3)}{(x+1)(x-3)} + \frac{3x-1}{(x+1)(x-3)} = \frac{(x^2-3x)+(3x-1)}{(x+1)(x-3)} \\ &= \frac{x^2-1}{(x+1)(x-3)} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-3)} = \frac{x-1}{x-3} \quad \text{答} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(4)} \quad \frac{3x+5}{x^2-1} - \frac{1}{x^2+x} &= \frac{3x+5}{(x+1)(x-1)} - \frac{1}{x(x+1)} \\ &= \frac{3x^2+5x}{x(x+1)(x-1)} - \frac{x-1}{x(x+1)(x-1)} = \frac{(3x^2+5x)-(x-1)}{x(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{3x^2+4x+1}{x(x+1)(x-1)} = \frac{(x+1)(3x+1)}{x(x+1)(x-1)} = \frac{3x+1}{x(x-1)} \quad \text{答} \end{aligned}$$

練習
19 $A=1+\frac{1}{x}$, $B=x-\frac{1}{x}$ のとき, $\frac{A}{B}$ を簡単にせよ。指針 分母や分子に分数式を含む式 A , B をそれぞれ1つの分数式にして $\frac{A}{B}=A \div B=A \times \frac{1}{B}$ として, 分数式の乗法の計算とする。

$$\text{解答} \quad \frac{A}{B}=A \div B=\left(1+\frac{1}{x}\right) \div \left(x-\frac{1}{x}\right)=\frac{x+1}{x} \div \frac{x^2-1}{x}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x+1}{x} \times \frac{x}{x^2-1} = \frac{x+1}{x} \times \frac{x}{(x+1)(x-1)} \\
 &= \frac{1}{x-1} \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

別解 $\frac{A}{B}$ の分母と分子に x を掛ける。

$$\begin{aligned}
 \frac{A}{B} &= \frac{1 + \frac{1}{x}}{x - \frac{1}{x}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right) \times x}{\left(x - \frac{1}{x}\right) \times x} \\
 &= \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x-1} \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

分母や分子にも分数式を含む分数式を、繁分数式というよ。



5 恒等式

まとめ

1 恒等式

文字を含む等式において、含まれている文字にどのような値を代入しても、両辺の値が存在する限り等式が常に成り立つとき、その等式をそれらの文字についての 恒等式 という。

2 恒等式の性質

恒等式の両辺が x についての多項式のとき、各辺で同類項を整理すると、次のことが成り立つ。

両辺の同じ次数の項の係数は、それぞれ等しい。

たとえば、 a, b, c, a', b', c' を定数とすると、次のことが成り立つ。

1 $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$ が x についての恒等式である

$$\iff a=a', b=b', c=c'$$

2 $ax^2+bx+c=0$ が x についての恒等式である

$$\iff a=b=c=0$$

A 恒等式

教 p.22

練習
20

次の等式のうち、 x についての恒等式はどれか。

(1) $(x+1)(x-1)=x^2-1$

(2) $x(x-1)+x=2x$

(3) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{2x+1}$

(4) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} = \frac{2}{x(x+2)}$

第1章 第1節

問 題

1
章

式と証明

教 p.25

1 次の式を展開せよ。

(1) $(2x-3y)^3$

(2) $(a+b)^2(a^2-ab+b^2)^2$

指針 3 次式の展開

(1) 展開の公式 $1 \quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ を利用する。 $2x$ をまとめて a , $3y$ をまとめて b とみる。(2) $(a+b)^2(a^2-ab+b^2)^2 = \{(a+b)(a^2-ab+b^2)\}^2$ として、展開の公式 $2 \quad (a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$ を利用する。

解答 (1) $(2x-3y)^3 = (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot 3y + 3 \cdot 2x \cdot (3y)^2 - (3y)^3$
 $= 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$ 答

(2) $(a+b)^2(a^2-ab+b^2)^2 = \{(a+b)(a^2-ab+b^2)\}^2$
 $= (a^3+b^3)^2 = (a^3)^2 + 2a^3 \cdot b^3 + (b^3)^2$
 $= a^6 + 2a^3b^3 + b^6$ 答

教 p.25

2 次の式を因数分解せよ。

(1) $8a^3+b^3$

(2) $(x+y)^3-1$

(3) a^6-7a^3-8

指針 3 次式の因数分解 因数分解の公式

 $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$, $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ を利用する。(1) は $8a^3 = (2a)^3$ から $2a$ を, (2) は $x+y$ を, それぞれ 1 つの文字と考える。(3) はまず, a^3 についての 2 次式とみて因数分解する。

解答 (1) $8a^3+b^3 = (2a)^3+b^3 = (2a+b)\{(2a)^2-2a \cdot b+b^2\}$
 $= (2a+b)(4a^2-2ab+b^2)$ 答

(2) $(x+y)^3-1 = (x+y)^3-1^3$
 $= \{(x+y)-1\}\{(x+y)^2+(x+y) \cdot 1+1^2\}$
 $= (x+y-1)(x^2+2xy+y^2+x+y+1)$ 答

(3) $a^6-7a^3-8 = (a^3)^2-7a^3-8 = (a^3+1)(a^3-8)$
 $= (a+1)(a^2-a+1)(a-2)(a^2+2a+4)$
 $= (a+1)(a-2)(a^2-a+1)(a^2+2a+4)$ 答

教 p.25

3 次の式の展開式において, [] 内に指定された項の係数を求めよ。

(1) $(3x^2+2)^6 \quad [x^2]$

(2) $(x-2y+3z)^5 \quad [xy^2z^2]$

指針 展開式の項の係数

- (1) $(a+b)^n$ の展開式の一般項は ${}_nC_r a^{n-r} b^r$ である。これに $n=6$, $a=3x^2$, $b=2$ をあてはめて計算し, x の指数が 2 になることから r の値を求める。
- (2) $\{(a+b)+c\}^n$ として二項定理を 2 回使う。

解答 (1) $(3x^2+2)^6$ の展開式の一般項は

$${}_6C_r (3x^2)^{6-r} \cdot 2^r = {}_6C_r 3^{6-r} \cdot 2^r \cdot x^{2(6-r)}$$

$$2(6-r)=2 \text{ とすると } r=5$$

$$\text{よって, 求める係数は } {}_6C_5 \times 3 \times 2^5 = 6 \times 3 \times 32 = 576 \quad \text{答}$$

- (2) $(x-2y+3z)^5$ の展開式において, z^2 を含む項は

$${}_5C_2 (x-2y)^3 (3z)^2$$

$$(x-2y)^3 \text{ の展開式において, } xy^2 \text{ の項は } {}_3C_2 x \cdot (-2y)^2$$

よって, 求める係数は

$${}_5C_2 \times {}_3C_2 \times 3^2 \times (-2)^2 = 10 \times 3 \times 9 \times 4 = 1080 \quad \text{答}$$

別解 (2) $(a+b+c)^n$ の展開式における $a^p b^q c^r$ (ただし $p+q+r=n$) の係数は

$$\frac{n!}{p!q!r!} \text{ であるから, } (x-2y+3z)^5 \text{ の } xy^2 z^2 \text{ の項の係数は}$$

$$\frac{5!}{1!2!2!} \cdot (-2)^2 \cdot 3^2 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \times 2 \cdot 1} \times 4 \times 9 = 1080 \quad \text{答}$$

教 p.25

4 次の条件を満たす多項式 A, B を求めよ。

- (1) A を $x+2$ で割ると, 商が x^2-x-3 , 余りが 5
- (2) $2x^3+5x^2-6x+3$ を B で割ると, 商が $2x-1$, 余りが $x+1$

指針 多項式の割り算 割り算に関する等式 $A=BQ+R$ にあてはめ, 式を変形して A, B を求める。(2) では最後に割り算をすることに注意。

解答 (1) この割り算について, 次の等式が成り立つ。

$$A=(x+2)(x^2-x-3)+5$$

整理すると

$$A=(x^3+x^2-5x-6)+5$$

$$=x^3+x^2-5x-1 \quad \text{答}$$

- (2) この割り算について, 次の等式が成り立つ。

$$2x^3+5x^2-6x+3=B \times (2x-1)+x+1$$

整理すると

$$2x^3+5x^2-7x+2=B \times (2x-1)$$

よって, $2x^3+5x^2-7x+2$ は $2x-1$ で割り切れて,
その商が B である。

$$\text{右の計算により } B=x^2+3x-2 \quad \text{答}$$

$$\begin{array}{r} x+2 \\ \times) x^2 - x - 3 \\ \hline x^3 + 2x^2 \\ \hline -x^2 - 2x \\ \hline -3x - 6 \\ \hline x^3 + x^2 - 5x - 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2+3x-2 \\ 2x-1 \overline{) 2x^3+5x^2-7x+2} \\ \underline{2x^3-x^2-7x+2} \\ \hline 6x^2-7x \\ \underline{6x^2-3x} \\ \hline -4x+2 \\ \underline{-4x+2} \\ \hline 0 \end{array}$$

5 次の式を計算せよ。

$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)}$$

指針 分数式の加法 分母が異なるから通分を考える。3つの分数式を同時に通分してもよいが、計算が大変になる。まず、最初の2つの分数式を通分して和を求め、3番目の分数式との和を計算する。

解答

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} &= \frac{x+2}{x(x+1)(x+2)} + \frac{x}{x(x+1)(x+2)} \\ &= \frac{2x+2}{x(x+1)(x+2)} = \frac{2(x+1)}{x(x+1)(x+2)} = \frac{2}{x(x+2)} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} \\ &= \frac{2}{x(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{2(x+3)}{x(x+2)(x+3)} + \frac{x}{x(x+2)(x+3)} \\ &= \frac{3x+6}{x(x+2)(x+3)} = \frac{3(x+2)}{x(x+2)(x+3)} = \frac{3}{x(x+3)} \quad \text{答} \end{aligned}$$

別解 式の特徴に着目し、次のようにして計算してもよい。

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x+1)} &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \\ \frac{1}{(x+1)(x+2)} &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \\ \frac{1}{(x+2)(x+3)} &= \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} \\ &= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} = \frac{x+3}{x(x+3)} - \frac{x}{x(x+3)} = \frac{3}{x(x+3)} \quad \text{答} \end{aligned}$$

左のような
変形を部分分数
分解というよ。



6 $A = x^2 - \frac{1}{x}$, $B = x + 1 + \frac{1}{x}$ のとき, $\frac{A}{B}$ を簡単にせよ。

指針 分母や分子に分数式を含む式 A , B をそれぞれ1つの分数式にして,

$$\frac{A}{B} = A \div B = A \times \frac{1}{B} \text{ として, 分数式の乗法の計算とする。}$$

または、 $\frac{A}{B} = \frac{AC}{BC}$ を利用して、 $\frac{A}{B}$ の分母と分子に同じ式を掛けて式を簡単にしてもよい。

解答
$$\begin{aligned}\frac{A}{B} &= \frac{x^2 - \frac{1}{x}}{x+1 + \frac{1}{x}} = \left(x^2 - \frac{1}{x}\right) \div \left(x+1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{x^3 - 1}{x} \div \frac{x(x+1) + 1}{x} \\ &= \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x} \div \frac{x^2+x+1}{x} \\ &= \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x} \times \frac{x}{x^2+x+1} = x-1 \quad \text{答}\end{aligned}$$

別解 $\frac{A}{B}$ の分母と分子に x を掛ける。

$$\begin{aligned}\frac{A}{B} &= \frac{x^2 - \frac{1}{x}}{x+1 + \frac{1}{x}} = \frac{\left(x^2 - \frac{1}{x}\right) \times x}{\left(x+1 + \frac{1}{x}\right) \times x} = \frac{x^3 - 1}{x^2 + x + 1} \\ &= \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2+x+1} = x-1 \quad \text{答}\end{aligned}$$

教 p.25

7 次の等式が x についての恒等式となるように、定数 a, b, c, d の値を定めよ。

- (1) $(x+1)a + (2x-1)b + 2x + 5 = 0$
 (2) $x^3 = ax(x-1)(x-2) + bx(x-1) + cx + d$

指針 恒等式 恒等式の係数を決定するには、両辺の同じ次数の項の係数を比較する係数比較法と、両辺の文字に適当な値を代入して係数を定める数値代入法がある。ここでは係数比較法で解く。数値代入法は求めた値は必要条件ではないから、十分条件でもある(恒等式になる)ことの確認を忘れないように注意する。

解答 (1) 等式の左辺を x について整理すると

$$(a+2b+2)x + (a-b+5) = 0$$

この等式が x についての恒等式であるから

$$a+2b+2=0 \quad \cdots \cdots \text{①}$$

$$a-b+5=0 \quad \cdots \cdots \text{②}$$

$$\text{①}-\text{②} \text{ から } 3b-3=0 \quad \text{よって } b=1$$

$$\text{②} \text{ に代入すると } a-1+5=0 \quad \text{よって } a=-4$$

$$\text{したがって } a=-4, b=1 \quad \text{答}$$

(2) 等式の右辺を x について整理すると

$$x^3 = ax^3 + (-3a+b)x^2 + (2a-b+c)x + d$$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$$1=a \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$0=-3a+b \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$0=2a-b+c \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$0=d \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

① から $a=1$, ④ から $d=0$

② に ① を代入すると $0=-3a+b$ よって $b=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$

③ に ① と ⑤ を代入すると $0=2-3+c$ よって $c=1$

したがって $a=1, b=3, c=1, d=0$ 答

別解 (2) 等式の両辺の x に 0, 1, 2, 3 をそれぞれ代入すると

$$d=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$1=c+d \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$8=2b+2c+d \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$27=6a+6b+3c+d \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

② に ① を代入すると $1=c+0$ よって $c=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$

③ に ① と ⑤ を代入すると $8=2b+2$ よって $b=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{6}$

④ に ⑥ と ⑤ と ① を代入すると $27=6a+18+3$ よって $a=1$

すなわち $a=1, b=3, c=1, d=0$

← 必要条件

逆に, これらの値を右辺に代入し整理すると左辺と一致し, 与えられた等式は x についての恒等式である。

← 十分条件でもあることの確認

したがって $a=1, b=3, c=1, d=0$ 答

教 p.25

- 8 x についての多項式 $6x^4+x^3-ax^2+2x+1$ を $2x^2+x+1$ で割ると, 商が bx^2-x-3 で, 余りが $cx+d$ となるように, 定数 a, b, c, d の値を定めよ。

指針 恒等式の利用 多項式 A を多項式 B で割ると商が Q , 余りが R であるとき, $A=BQ+R$ が成り立つ。この式にあてはめて, x についての恒等式とみて, 両辺の同じ次数の項の係数を比較する。

解答 $6x^4+x^3-ax^2+2x+1$ を $2x^2+x+1$ で割ると, 商が bx^2-x-3 で, 余りが $cx+d$ であるとき, 次の等式が成り立つ。

$$6x^4+x^3-ax^2+2x+1=(2x^2+x+1)(bx^2-x-3)+cx+d$$

等式の右辺を x について整理すると

$$6x^4+x^3-ax^2+2x+1=2bx^4+(b-2)x^3+(b-7)x^2+(c-4)x+(d-3)$$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$$6=2b, 1=b-2, -a=b-7, 2=c-4, 1=d-3$$

これを解いて $a=4, b=3, c=6, d=4$ 答

第2節 等式・不等式の証明

6 等式の証明

まとめ

1 $A=B$ の証明

恒等式 $A=B$ を証明するには、たとえば次のような方法がある。

1 A か B の一方を変形して、他方を導く。

2 A と B の両方を変形して、同じ式を導く。

3 $A-B$ を変形して、0 になることを示す。

← $A-B=0$ を示す。

2 条件付きの等式の証明

ある条件のもとで成り立つ等式を証明するには、その条件をもとにして、1 つの文字を他の文字におき換えて、文字の数を減らして証明することがある。

3 比の値と比例式

比 $a:b$ について、 $\frac{a}{b}$ を 比の値 という。また、比 $a:b$ と $c:d$ が等しいことを表す式 $a:b=c:d$ を 比例式 という。比が等しいとき、比の値も等しく、 $a:b=c:d$ は $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ とも表される。

A 恒等式の証明

教 p.27

練習
23

次の等式を証明せよ。

$$(1) \quad a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$$

$$(2) \quad a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2$$

$$(3) \quad (1+x)^3 = 1+x+x(1+x)+x(1+x)^2$$

指針 恒等式の証明 恒等式 $A=B$ の証明は、複雑な方の辺の式を変形して簡単な方の辺の式へと導くのが一般的である(方法1)。

どちらともいえない場合は、方法2または方法3を用いる。

(1), (2) は方法1, (3) は方法2を使うのがよい。

解答 (1) 右辺 $= (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) + 3a^2b - 3ab^2$
 $= a^3 - b^3$

よって $a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$ **終**

(2) 右辺 $= \left(a^2 + ab + \frac{b^2}{4}\right) + \frac{3}{4}b^2$
 $= a^2 + ab + b^2$

1つの証明方法にこだわらずにいろいろ試してみよう。



$$\text{よって } a^2+ab+b^2=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2 \quad \text{終}$$

$$(3) \text{ 左辺}=1+3x+3x^2+x^3$$

$$\leftarrow (a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$\text{右辺}=1+x+x^2+x(1+2x+x^2)$$

$$=1+2x+x^2+x+2x^2+x^3=1+3x+3x^2+x^3$$

$$\text{よって } (1+x)^3=1+x+x(1+x)+x(1+x)^2 \quad \text{終}$$

$$\text{別解 (3) 右辺}=(1+x)+x(1+x)+x(1+x)^2$$

$$=(1+x)\{1+x+x(1+x)\}$$

← 因数分解

$$=(1+x)(1+2x+x^2)$$

$$=(1+x)(1+x)^2=(1+x)^3$$

$$\text{よって } (1+x)^3=1+x+x(1+x)+x(1+x)^2 \quad \text{終}$$

B 条件付きの等式の証明

教 p.27

練習
24

$a+b+c=0$ のとき、次の等式を証明せよ。

$$a^2+ca=b^2+bc$$

指針 条件付きの等式の証明 まず両辺の差をとる。次に、 $a+b+c=0$ より、 $c=-(a+b)$ であるから、 c に $-(a+b)$ を代入して、0 となることを示す。

解答 $a+b+c=0$ より、 $c=-(a+b)$ であるから

$$a^2+ca-(b^2+bc)$$

$$=a^2-(a+b)a-\{b^2-b(a+b)\}$$

← c を $-(a+b)$ におき換える

$$=a^2-(a^2+ab)-b^2+(ab+b^2)$$

$$=0$$

$$\text{よって } a^2+ca=b^2+bc \quad \text{終}$$

別解 $a+c=-b$ 、 $b+c=-a$ であるから

$$\text{左辺}=a^2+ca=a(a+c)=-ab$$

$$\text{右辺}=b^2+bc=b(b+c)=-ab$$

$$\text{よって } a^2+ca=b^2+bc \quad \text{終}$$

練習
25

$a+b+c=0$ のとき、次の等式を証明せよ。

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+3abc=0$$

教 p.27

指針 条件付きの等式の証明 $a+b+c=0$ より、 $c=-(a+b)$ であるから、 c を $-(a+b)$ におき換える。

解答 $a+b+c=0$ より、 $c=-(a+b)$ であるから

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+3abc$$

$$=ab(a+b)-b(a+b)\{b-(a+b)\}-(a+b)a\{-(a+b)+a\}-3ab(a+b)$$

$$=ab(a+b)+ab(a+b)+ab(a+b)-3ab(a+b)$$

$$=0$$

$$\text{よって } ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+3abc=0 \quad \text{終}$$

別解 $a+b=-c$, $b+c=-a$, $c+a=-b$ であるから

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+3abc$$

$$=-abc-abc-abc+3abc$$

$$=0$$

$$\text{よって } ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+3abc=0 \quad \text{終}$$

C 条件が比例式の等式の証明

教 p.28

練習
26

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ のとき、次の等式を証明せよ。

$$(1) \quad \frac{a+c}{b+d} = \frac{2a-3c}{2b-3d} \qquad (2) \quad \frac{a^2+c^2}{b^2+d^2} = \frac{a^2}{b^2}$$

指針 条件が比例式の等式の証明 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ とおくと, $\frac{a}{b} = k$, $\frac{c}{d} = k$ より,

$$a=bk, \quad c=dk \text{ である。}$$

これらを等式の各辺に代入してみる。

解答 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ とおくと $a=bk$, $c=dk$

$$(1) \quad \frac{a+c}{b+d} = \frac{bk+dk}{b+d} = \frac{k(b+d)}{b+d} = k$$

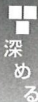
$$\frac{2a-3c}{2b-3d} = \frac{2bk-3dk}{2b-3d} = \frac{k(2b-3d)}{2b-3d} = k$$

$$\text{よって } \frac{a+c}{b+d} = \frac{2a-3c}{2b-3d} \quad \text{終}$$

$$(2) \quad \frac{a^2+c^2}{b^2+d^2} = \frac{b^2k^2+d^2k^2}{b^2+d^2} = \frac{k^2(b^2+d^2)}{b^2+d^2} = k^2$$

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{b^2k^2}{b^2} = k^2$$

$$\text{よって } \frac{a^2+c^2}{b^2+d^2} = \frac{a^2}{b^2} \quad \text{終}$$



教科書の応用例題 3 を，教科書の例題 8 のように，条件式を用いて文字を減らす方法で証明してみよう。

指針 条件つき等式の証明 「 $=k$ 」とおくのではなく，条件式をもとに，1つの文字を消去する方針によって証明する。たとえば， $a=\frac{bc}{d}$ として， a を消去する場合は次のようになる。

解答 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ より， $a=\frac{bc}{d}$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{a+c}{b+d} &= \frac{\frac{bc}{d}+c}{b+d} = \frac{bc+cd}{d(b+d)} \\ &= \frac{c(b+d)}{d(b+d)} = \frac{c}{d}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{a-c}{b-d} &= \frac{\frac{bc}{d}-c}{b-d} = \frac{bc-cd}{d(b-d)} \\ &= \frac{c(b-d)}{d(b-d)} = \frac{c}{d}\end{aligned}$$

よって $\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}$ 終

7 不等式の証明

まとめ

1 実数の大小関係の基本性質

1 $a > b, b > c \implies a > c$

2 $a > b \implies a + c > b + c, a - c > b - c$

3 $a > b, c > 0 \implies ac > bc, \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

4 $a > b, c < 0 \implies ac < bc, \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

2 2数の大小関係と差

5 $a > b \iff a - b > 0$

6 $a < b \iff a - b < 0$

注意 不等式では、とくに断らない限り、文字は実数を表すものとする。2つの実数 a, b については、 $a > b, a = b, a < b$ のうち、どれか1つの関係だけが成り立つ。

3 2数がともに正、ともに負のときの性質

$a > 0, b > 0 \implies a + b > 0 \quad a > 0, b > 0 \implies ab > 0$

$a < 0, b < 0 \implies a + b < 0 \quad a < 0, b < 0 \implies ab > 0$

4 実数の平方の性質

1 実数 a について $a^2 \geq 0$

等号が成り立つのは、 $a = 0$ のときである。

2 実数 a, b について $a^2 + b^2 \geq 0$

等号が成り立つのは、 $a = b = 0$ のときである。

5 平方の大小関係

$a > 0, b > 0$ のとき

$a^2 > b^2 \iff a > b$

$a^2 \geq b^2 \iff a \geq b$

注意 上のことは、 $a \geq 0, b \geq 0$ のときにも成り立つ。

6 絶対値の性質

実数 a の絶対値 $|a|$ は、その定義より、次のようになる。

$a \geq 0$ のとき $|a| = a$

$a < 0$ のとき $|a| = -a$

また、実数の絶対値について、次のことが成り立つ。

$|a| \geq 0, \quad |a| \geq a, \quad |a| \geq -a$

$|a|^2 = a^2, \quad |ab| = |a||b|$

7 相加平均と相乗平均の大小関係

2つの実数 a, b について, $\frac{a+b}{2}$ を a と b の 相加平均 といい, $a>0, b>0$

のとき, $\sqrt{ab}$ を a と b の 相乗平均 という。

相加平均と相乗平均の間には, 次の関係が成り立つ。

$$a>0, b>0 \text{ のとき } \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

← $a+b \geq 2\sqrt{ab}$
の形で使うことも多い。

等号が成り立つのは, $a=b$ のときである。

注意 このことは, $a \geq 0, b \geq 0$ のときにも成り立つ。

A 実数の大小関係

練習
27

$x>y$ のとき, 次の不等式を証明せよ。

$$3x-4y>x-2y$$

教 p.30

指針 不等式の証明 たとえば, 不等式 $A>B$ を証明するには, $A-B>0$ であることを示してもよい。

$$x>y \iff x-y>0$$

$$3x-4y>x-2y \iff (3x-4y)-(x-2y)>0$$

であるから

$$x-y>0 \text{ のとき } (3x-4y)-(x-2y)>0$$

を示せばよい。

解答 $(3x-4y)-(x-2y)=2x-2y=2(x-y)$

$x>y$ より, $x-y>0$ であるから $2(x-y)>0$

よって $(3x-4y)-(x-2y)>0$

したがって $3x-4y>x-2y$ **終**

練習
28

$x>2, y>3$ のとき, 次の不等式を証明せよ。

$$xy+6>3x+2y$$

教 p.30

指針 不等式の証明

$$x>2, y>3 \iff x-2>0, y-3>0$$

$$xy+6>3x+2y \iff (xy+6)-(3x+2y)>0$$

であるから, 練習 27 と同様に

$$x-2>0, y-3>0 \text{ のとき } (xy+6)-(3x+2y)>0$$

を示せばよい。

$(xy+6)-(3x+2y)$ を x について整理して因数分解する。

解答 $(xy+6)-(3x+2y)=xy-3x-2y+6$
 $= (y-3)x-2(y-3)$
 $= (x-2)(y-3)$

← x について整理すると、
 共通因数 $y-3$ がみつかる。

$x > 2$, $y > 3$ より, $x-2 > 0$, $y-3 > 0$ であるから

$$(x-2)(y-3) > 0$$

$$\leftarrow a > 0, b > 0 \implies ab > 0$$

よって $(xy+6)-(3x+2y) > 0$

したがって $xy+6 > 3x+2y$ 終

B 実数の平方

教 p.31

練習
29

次の不等式を証明せよ。また、等号が成り立つときを調べよ。

(1) $x^2+9y^2 \geq 6xy$

(2) $(a+b)^2 \geq 4ab$

(3) $2x^2+9y^2 \geq 6xy$

(4) $a^2-ab+b^2 \geq 0$

指針 実数の平方と不等式の証明 (1)~(3)は、左辺-右辺 ≥ 0 を示す。

(1), (2)は A^2 の形を導く。(3), (4)は A^2+B^2 の形を導く。

$A^2+B^2 \geq 0$ であり、等号が成り立つのは、 $A=B=0$ のときである。

解答 (1) $(x^2+9y^2)-6xy=x^2-6xy+9y^2=(x-3y)^2 \geq 0$

よって $x^2+9y^2 \geq 6xy$

等号が成り立つのは、 $x-3y=0$, すなわち $x=3y$ のときである。 終

(2) $(a+b)^2-4ab=(a^2+2ab+b^2)-4ab=a^2-2ab+b^2$

$$=(a-b)^2 \geq 0$$

よって $(a+b)^2 \geq 4ab$

等号が成り立つのは、 $a-b=0$, すなわち $a=b$ のときである。 終

(3) $2x^2+9y^2-6xy=x^2+(x^2-6xy+9y^2)$

$$=x^2+(x-3y)^2 \geq 0$$

$$\leftarrow x^2 \geq 0, (x-3y)^2 \geq 0$$

よって $2x^2+9y^2 \geq 6xy$

等号が成り立つのは、 $x=0$ かつ $x-3y=0$, すなわち

$x=y=0$ のときである。 終

(4) $a^2-ab+b^2=a^2-ab+\frac{1}{4}b^2+\frac{3}{4}b^2$

$$=\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2 \geq 0$$

$$\leftarrow \left(a-\frac{1}{2}b\right)^2 \geq 0, \frac{3}{4}b^2 \geq 0$$

よって $a^2-ab+b^2 \geq 0$

等号が成り立つのは、 $a-\frac{1}{2}b=0$ かつ $b=0$,

すなわち $a=b=0$ のときである。 終

(3), (4)の等号成立は、
 $A^2+B^2=0 \iff A=0, B=0$ から考えるよ。



C 平方の大小関係

練習
30 $x > 0$ のとき、次の不等式を証明せよ。

$$1+x > \sqrt{1+2x}$$

教 p.32

1
章

式と証明

指針 平方の大小関係と不等式の証明 根号は平方するとはずすことができる。

 $(1+x)^2 > (\sqrt{1+2x})^2$ を示し、次のことを用いる。

$$a > 0, b > 0 \text{ のとき } a^2 > b^2 \iff a > b$$

解答 両辺の平方の差を考えると

$$(1+x)^2 - (\sqrt{1+2x})^2 = (1+2x+x^2) - (1+2x)$$

$$= x^2 > 0$$

$$\leftarrow x > 0$$

よって $(1+x)^2 > (\sqrt{1+2x})^2$ $1+x > 0, \sqrt{1+2x} > 0$ であるから

$$1+x > \sqrt{1+2x} \quad \text{終}$$

 $\leftarrow a > 0, b > 0 \text{ のとき}$

$$a^2 > b^2 \iff a > b$$

D 絶対値を含む不等式の証明

練習
31

次の不等式を証明せよ。また、等号が成り立つときを調べよ。

$$|a| + |b| \geq |a-b|$$

教 p.33

指針 絶対値を含む不等式の証明 不等式の両辺について、 $|a| + |b| \geq 0, |a-b| \geq 0$ であるから、次のことを用いる。

$$A \geq 0, B \geq 0 \text{ のとき } A^2 \geq B^2 \iff A \geq B$$

解答 両辺の平方の差を考えると

$$(|a| + |b|)^2 - |a-b|^2$$

$$= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a-b)^2$$

$$= a^2 + 2|ab| + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2)$$

$$= 2(|ab| + ab) \geq 0$$

よって $(|a| + |b|)^2 \geq |a-b|^2$ $|a| + |b| \geq 0, |a-b| \geq 0$ であるから

$$|a| + |b| \geq |a-b|$$

等号が成り立つのは $|ab| = -ab$ すなわち $ab \leq 0$ のときである。終

$$\leftarrow |a-b|^2 = (a-b)^2$$

$$|a|^2 = a^2, |b|^2 = b^2$$

$$|a||b| = |ab|$$

$$\leftarrow |ab| \geq -ab$$

 $\leftarrow |A| = -A \text{ のとき}$

$$A \leq 0$$

E 相加平均と相乗平均

教 p.35

練習
32

$a > 0, b > 0$ のとき、次の不等式を証明せよ。また、等号が成り立つときを調べよ。

(1) $a + \frac{4}{a} \geq 4$

(2) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

指針 相加平均・相乗平均と不等式の証明 相加平均と相乗平均の大小関係を、 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ の形で使う。

解答 (1) $a > 0, \frac{4}{a} > 0$ であるから、相加平均と相乗平均の大小関係により

$$a + \frac{4}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{4}{a}} = 2\sqrt{4} = 4$$

よって $a + \frac{4}{a} \geq 4$

等号が成り立つのは、 $a > 0$ かつ $a = \frac{4}{a}$ 、すなわち $a = 2$ のときである。 **終**

(2) $\frac{a}{b} > 0, \frac{b}{a} > 0$ であるから、相加平均と相乗平均の大小関係により

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2$$

よって $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

等号が成り立つのは、 $a > 0, b > 0$ かつ $\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$ 、すなわち $a = b$ のときである。 **終**

補足 等号が成り立つ条件の求め方

(1) $a + \frac{4}{a} \geq 4$ で等号が成り立つとき $a + \frac{4}{a} = 4$

このとき、 $\frac{4}{a} = a$ であるから $a + a = 4$

よって $a = 2$ $\left(\frac{4}{a} = 2 = a \text{ となり、適する} \right)$

(2) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ で等号が成り立つとき $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2$

このとき、 $\frac{b}{a} = \frac{a}{b}$ であるから $\frac{a}{b} + \frac{a}{b} = 2$

よって $\frac{a}{b} = 1$ すなわち $a = b$ $\left(\frac{b}{a} = 1 = \frac{a}{b} \text{ となり、適する} \right)$

コラム 不等式と式の値の最大・最小

1章

式と証明

教 p.35

練習

教科書 35 ページの下線部 ① を求めてみよう。また、下線部 ② について、その理由を考え、 $x + \frac{1}{x} \geq 2$ のような式の値の最大値や最小値を表す不等式との違いを説明してみよう。

指針 式の値の最大・最小 前半(下線部①)では、 $x < 0$ のとき、 $-x > 0$ であるから、教科書 p.34 の例題 12 の結果が利用できることに着目する。後半(下線部②)では、 $x + \frac{1}{x} \geq 2$ では、左辺と右辺の値が等しくなる場合があるのに対し、 $x^2 + 1 \geq 0$ では、そのような場合がないことに着目する。

解答 下線部 ① について

$x < 0$ のとき、 $-x > 0$ であるから、例題 12 において、 a を $-x$ におき換えると $-x + \frac{1}{-x} \geq 2$ すなわち $x + \frac{1}{x} \leq -2$ …… (*) が成り立つ。

(*) の等号が成り立つのは、 $x < 0$ かつ $-x = \frac{1}{-x}$ 、すなわち、 $x < 0$ かつ

$x^2 = 1$ より、 $x = -1$ のときである。

よって、 $x < 0$ のとき、 $x + \frac{1}{x}$ は $x = -1$ で最大値 -2 をとる。 答

下線部 ② について (例)

不等式 $x + \frac{1}{x} \geq 2$ においては、 $x + \frac{1}{x} = 2$ を満たす実数 x ($x = 1$) が存在するから、

$x + \frac{1}{x}$ の最小値は 2 であるが、不等式 $x^2 + 1 \geq 0$ においては、 $x^2 + 1 = 0$ を満たす実数 x が存在しないから、 $x^2 + 1$ の最小値は 0 ではない。 終

第1章 第2節

問題

教 p.36

9 次の等式を証明せよ。

(1) $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$

(2) $x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$

指針 恒等式の証明 (1), (2) とも, 右辺を変形して左辺を導くとよい。

解答 (1) 右辺 $= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 2$

$$= x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2} = \text{左辺}$$

よって $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$ 終

(2) 右辺 $= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$

$$= x^3 + 3x^2 \cdot \frac{1}{x} + 3x \left(\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} - 3x - \frac{3}{x} = x^3 + \frac{1}{x^3} = \text{左辺}$$

よって $x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$ 終

教 p.36

10 $a+b+c=0$ のとき, 次の等式を証明せよ。

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 0$$

指針 条件付きの等式の証明 $a+b+c=0$ より, $c=-(a+b)$ を左辺に代入する。解答 $a+b+c=0$ より, $c=-(a+b)$ であるから

$$\text{左辺} = a^2 + b^2 + \{-(a+b)\}^2 + 2ab - 2b(a+b) - 2(a+b)a$$

$$= a^2 + b^2 + (a^2 + 2ab + b^2) + 2ab - 2ab - 2b^2 - 2a^2 - 2ab$$

$$= 0 = \text{右辺}$$

よって $a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 0$ 終

別解 左辺 $= a^2 + 2(b+c)a + (b+c)^2 = \{a + (b+c)\}^2 = 0 = \text{右辺}$ 終

教 p.36

11 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ のとき, 次の等式を証明せよ。

$$\frac{ma + nc}{mb + nd} = \frac{a}{b}$$

指針 条件が比例式の等式の証明 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ とおくと $a = bk, c = dk$

これより、左辺と右辺についてそれぞれ a を bk に、 c を dk におき換えて、左辺と右辺が同じ式になることを示す。

解答 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ とおくと $a = bk, c = dk$

$$\text{よって} \quad \frac{ma+nc}{mb+nd} = \frac{m \cdot bk + n \cdot dk}{mb+nd} = \frac{(mb+nd)k}{mb+nd} = k$$

$$\frac{a}{b} = \frac{bk}{b} = k$$

$$\text{したがって} \quad \frac{ma+nc}{mb+nd} = \frac{a}{b} \quad \text{終}$$

教 p.36

12 $a < b, x < y$ のとき、 $ax + by$ と $bx + ay$ の大小を、不等号を用いて表せ。

指針 実数の大小関係 $(ax + by) - (bx + ay)$ の符号を調べる。次のことを使う。

$$P - Q > 0 \iff P > Q \quad P - Q < 0 \iff P < Q$$

解答 $(ax + by) - (bx + ay) = ax + by - bx - ay$

$$= a(x - y) - b(x - y)$$

$$= (a - b)(x - y)$$

← 因数分解

$$a < b, x < y \text{ のとき} \quad a - b < 0, x - y < 0$$

$$\text{よって} \quad (a - b)(x - y) > 0$$

← $(-) \times (-) = (+)$

$$\text{すなわち} \quad (ax + by) - (bx + ay) > 0$$

$$\text{したがって} \quad ax + by > bx + ay \quad \text{答}$$

教 p.36

13 $a > 0, b > 0$ のとき、次の不等式を証明せよ。

$$\sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

指針 平方の大小関係 $A > 0, B > 0$ のとき、次の関係が利用できる。

$$A^2 > B^2 \iff A > B$$

解答 両辺の平方の差を考えると

$$\{\sqrt{2(a+b)}\}^2 - (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = 2(a+b) - (a + 2\sqrt{ab} + b)$$

$$= a - 2\sqrt{ab} + b$$

$$= (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

$$\text{よって} \quad \{\sqrt{2(a+b)}\}^2 \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$$

$$\sqrt{2(a+b)} > 0, \sqrt{a} + \sqrt{b} > 0 \text{ であるから}$$

$$\sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad \text{終}$$

注意 等号が成り立つのは $a > 0, b > 0$ かつ $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$ 、すなわち $a = b$ のときである。

14 $a > 0, b > 0$ のとき、次の不等式を証明せよ。

$$(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$$

指針 相加平均・相乗平均と不等式の証明 左辺を展開し、分数式の部分について相加平均と相乗平均の大小関係を用いる。

解答 左辺を展開すると

$$(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = a \cdot \frac{1}{a} + a \cdot \frac{1}{b} + b \cdot \frac{1}{a} + b \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2$$

$a > 0, b > 0$ のとき、 $\frac{a}{b} > 0, \frac{b}{a} > 0$ であるから、相加平均と相乗平均の大小関係により

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2$$

$$\text{よって } (a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2 \geq 2 + 2 = 4 \quad \text{終}$$

注意 等号が成り立つのは、 $\frac{a}{b} = 2, \frac{a}{b} = \frac{b}{a}$ から $\frac{a}{b} = \frac{b}{a} = 1$ のとき、すなわち $a = b$ のときである。

15 次のようなゲームを行う。

1 から 7 までの数字の書かれた 7 枚のカードがある。このカードを 2 つの組に分けて、それぞれの組の和の積をこのゲームの得点とする。たとえば、1, 2, 3, 4 と 5, 6, 7 の 2 つの組に分けた場合、得点は $(1+2+3+4)(5+6+7) = 10 \cdot 18 = 180$ で 180 点となる。

このゲームの得点の最大値を求めよ。また、得点が最大となるような組の分け方を 1 つ示せ。

指針 相加平均・相乗平均と最大値 2 つの組に分けたときのそれぞれの組の和を m, n とする。 $m > 0, n > 0$ であることから、相加平均と相乗平均の大小関係の利用を考える。

解答 2 つの組に分けたときのそれぞれの組の和を m, n とすると、ゲームの得点は mn 点である。

このとき、 $m > 0, n > 0$ であるから、相加平均と相乗平均の大小関係により

$$\frac{m+n}{2} \geq \sqrt{mn}$$

両辺はともに正であるから、両辺を 2 乗すると

$$\left(\frac{m+n}{2}\right)^2 \geq (\sqrt{mn})^2 \quad \text{すなわち} \quad mn \leq \left(\frac{m+n}{2}\right)^2 \quad \dots\dots ①$$

$m+n$ は 1 から 7 までの和であるから $m+n=28$

したがって、① から $mn \leq 14^2 = 196$

① の等号が成り立つのは $m=n$ のときであるから

$$m=n=14$$

したがって、2つの組の和がともに 14 となるように分けたときに得点は最大となり、その値は 196 点である。

2つの組の和がともに 14 となる分け方は、たとえば、(1, 2, 5, 6) と (3, 4, 7) がある。

よって、最大値 196 点、

得点が最大となるような組の分け方の 1 つは

(1, 2, 5, 6) と (3, 4, 7) 答

補足 他に (1, 2, 4, 7) と (3, 5, 6), (1, 3, 4, 6) と (2, 5, 7), (1, 6, 7) と (2, 3, 4, 5) のように分けることもできる。

参考 次のように、2 次関数を利用する別解も考えられる。

別解 1 から 7 までの和は 28 であるから、それぞれの組の和は x , $28-x$ とおけて、 $x \geq 1$ かつ $28-x \geq 1$ より、 $1 \leq x \leq 27$ …… ② である。

このとき、得点は

$$x(28-x) = -x^2 + 28x = -(x-14)^2 + 196 \text{ (点)}$$

② から、 $x=14$ のとき、すなわち、2つの組の和がともに 14 のときに得点は最大となり、最大値が 196 点となることがわかる。

(以降は、解答と同様に、2つの組の和がともに 14 となるような分け方を提示すればよい。)

第1章 章末問題A

教 p.37

1. $x = \frac{1}{\sqrt{5}+2}$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $x + \frac{1}{x}$

(2) $x^2 + \frac{1}{x^2}$

(3) $x^3 + \frac{1}{x^3}$

指針 式の値 (2), (3) では, (1) の結果を用いて, 次の ①, ② の等式を利用して計算する。

(2) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ から

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab \quad \cdots \cdots \text{①}$$

(3) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ から

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) \quad \cdots \cdots \text{②}$$

解答 (1) $x + \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{5}+2} + (\sqrt{5}+2)$

$$= \frac{\sqrt{5}-2}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} + (\sqrt{5}+2)$$

$$= (\sqrt{5}-2) + (\sqrt{5}+2) = 2\sqrt{5} \quad \text{答}$$

(2) $x^2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2x \cdot \frac{1}{x}$

$$= (2\sqrt{5})^2 - 2 = 20 - 2 = 18 \quad \text{答}$$

(3) $x^3 + \frac{1}{x^3} = x^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^3 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right)$

$$= (2\sqrt{5})^3 - 3 \cdot 2\sqrt{5}$$

$$= 40\sqrt{5} - 6\sqrt{5} = 34\sqrt{5} \quad \text{答}$$

別解 (3) 因数分解の公式 $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ と (2) の結果を利用して, 次のように解くこともできる。

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right) \left\{ x^2 - x \cdot \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 \right\} = \left(x + \frac{1}{x}\right) \left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 1\right)$$

$$= 2\sqrt{5} (18 - 1) = 34\sqrt{5} \quad \text{答}$$

教 p.37

2. 次の多項式 A, B について, A を B で割った商と余りを求めよ。

(1) $A = x^4 - 1, B = x - 1$

(2) $A = 4x^3 + 7x^2 - 9x + 3, B = 2x^2 + 4x - 3$

指針 多項式の割り算

(1) A には 1 次～3 次の項がない。割られる式に, ある次数の項がない場合は, その場所を空けておくと計算しやすい。

解答 (1)

$$\begin{array}{r}
 x^3+x^2+x+1 \\
 x-1 \overline{) x^4 } -1 \\
 \underline{x^4-x^3} \\
 x^3 \\
 \underline{x^3-x^2} \\
 x^2 \\
 \underline{x^2-x} \\
 x-1 \\
 \underline{x-1} \\
 0
 \end{array}$$

答 商 x^3+x^2+x+1 , 余り 0

(2)

$$\begin{array}{r}
 2x - \frac{1}{2} \\
 2x^2+4x-3 \overline{) 4x^3+7x^2-9x+3} \\
 \underline{4x^3+8x^2-6x} \\
 -x^2-3x+3 \\
 \underline{-x^2-2x+\frac{3}{2}} \\
 -x+\frac{3}{2}
 \end{array}$$

答 商 $2x-\frac{1}{2}$, 余り $-x+\frac{3}{2}$

教 p.37

3. 次の式を計算せよ。

$$\begin{array}{ll}
 (1) \frac{x^2+3x}{x^2-2x+1} \times \frac{x-1}{x+3} & (2) \frac{a^2+4a+4}{a^2-4a} \div \frac{a^2+2a}{a-4} \\
 (3) \frac{1}{x^2-x} - \frac{2}{x^2-1} & (4) \frac{x-y}{xy} + \frac{y-z}{yz} + \frac{z-x}{zx}
 \end{array}$$

指針 分数式の四則計算 分数式の計算では、まず分母や分子を因数分解する。加法・減法では、通分してから計算する。
計算結果は、それ以上約分できない既約分数式か多項式の形にしておく。

解答 (1) $\frac{x^2+3x}{x^2-2x+1} \times \frac{x-1}{x+3} = \frac{x(x+3) \times (x-1)}{(x-1)^2(x+3)} = \frac{x}{x-1}$ 答

(2) $\frac{a^2+4a+4}{a^2-4a} \div \frac{a^2+2a}{a-4} = \frac{(a+2)^2}{a(a-4)} \times \frac{a-4}{a(a+2)} = \frac{(a+2)^2(a-4)}{a^2(a-4)(a+2)} = \frac{a+2}{a^2}$ 答

(3) $\frac{1}{x^2-x} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x(x-1)} - \frac{2}{(x+1)(x-1)}$
 $= \frac{x+1}{x(x+1)(x-1)} - \frac{2x}{x(x+1)(x-1)} = \frac{(x+1)-2x}{x(x+1)(x-1)}$
 $= \frac{1-x}{x(x+1)(x-1)} = \frac{-(x-1)}{x(x+1)(x-1)} = -\frac{1}{x(x+1)}$ 答

(4) $\frac{x-y}{xy} + \frac{y-z}{yz} + \frac{z-x}{zx} = \frac{(x-y)z}{xyz} + \frac{(y-z)x}{xyz} + \frac{(z-x)y}{xyz}$

$$= \frac{(x-y)z + (y-z)x + (z-x)y}{xyz} = \frac{xz - yz + yx - zx + zy - xy}{xyz} = 0 \quad \text{答}$$

教 p.37

4. 次の等式が x についての恒等式となるように、定数 a, b, c の値を定めよ。

$$(1) \quad x^3 = (x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c$$

$$(2) \quad \frac{3}{x^3+1} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$$

指針 恒等式の性質 恒等式においては、次のことが成り立つ。

両辺の同じ次数の項の係数は、それぞれ等しい。

- (2) $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ であることに着目し、分母をはらう。分数式の恒等式は、分母をはらった等式もまた恒等式である。

解答 (1) 等式の右辺を計算すると

$$x^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + ax^2 - 2ax + a + bx - b + c$$

$$\text{整理すると} \quad (a-3)x^2 + (-2a+b+3)x + (a-b+c-1) = 0$$

この等式も x についての恒等式であるから、どの係数も 0 に等しく

$$a-3=0, \quad -2a+b+3=0, \quad a-b+c-1=0$$

これを解いて $a=3, b=3, c=1$ 答

- (2) 等式の両辺に $(x+1)(x^2-x+1) (=x^3+1)$ を掛けると

$$3 = a(x^2-x+1) + (bx+c)(x+1)$$

$$\text{右辺を計算して} \quad 3 = ax^2 - ax + a + bx^2 + bx + cx + c$$

$$\text{整理すると} \quad 3 = (a+b)x^2 + (-a+b+c)x + (a+c)$$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから

$$0 = a+b, \quad 0 = -a+b+c, \quad 3 = a+c$$

これを解いて $a=1, b=-1, c=2$ 答

別解 (1) 等式の両辺の x に 0, 1, 2 をそれぞれ代入すると

$$0 = -1 + a - b + c, \quad 1 = c, \quad 8 = 1 + a + b + c$$

$$\text{これを解いて} \quad a=3, b=3, c=1$$

逆に、 $a=3, b=3, c=1$ のとき、与えられた等式は確かに恒等式となる。

$$\text{したがって} \quad a=3, b=3, c=1 \quad \text{答}$$

教 p.37

5. 次の不等式を証明せよ。

$$(1) \quad |a| - |b| \leq |a-b|$$

$$(2) \quad |a| - |b| \leq |a+b|$$

指針 絶対値を含む不等式の証明 次の 2 つの場合に分けて考える。

$$[1] \quad |a| - |b| \geq 0$$

$$[2] \quad |a| - |b| < 0$$

[1] の場合は、両辺の平方の差を考える。また、[2] の場合は、
左辺 <0 、右辺 ≥ 0 となる。

解答 (1) [1] $|a|-|b|\geq 0$ のとき

両辺の平方の差を考えると、 $|ab|\geq ab$ から

$$\begin{aligned} |a-b|^2 - (|a|-|b|)^2 &= (a-b)^2 - (|a|^2 - 2|a||b| + |b|^2) \\ &= (a^2 - 2ab + b^2) - (a^2 - 2|ab| + b^2) \\ &= 2(|ab| - ab) \geq 0 \end{aligned}$$

よって $|a-b|^2 \geq (|a|-|b|)^2$

$|a|-|b|\geq 0$ 、 $|a-b|\geq 0$ であるから

$$|a|-|b| \leq |a-b|$$

[2] $|a|-|b|<0$ のとき、 $|a-b|\geq 0$ であるから

$$|a|-|b| < |a-b|$$

[1], [2] から $|a|-|b| \leq |a-b|$ **終**

注意 等号が成り立つのは、 $|a|-|b|\geq 0$ かつ $|ab|=ab$ 、すなわち $|a|\geq |b|$ かつ $ab\geq 0$ のときである。

(2) [1] $|a|-|b|\geq 0$ のとき

両辺の平方の差を考えると

$$\begin{aligned} |a+b|^2 - (|a|-|b|)^2 &= (a+b)^2 - (|a|^2 - 2|a||b| + |b|^2) \\ &= (a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2|ab| + b^2) \\ &= 2(|ab| + ab) \geq 0 \end{aligned}$$

よって $|a+b|^2 \geq (|a|-|b|)^2$

$|a+b|\geq 0$ 、 $|a|-|b|\geq 0$ であるから

$$|a|-|b| \leq |a+b|$$

[2] $|a|-|b|<0$ のとき、 $|a+b|\geq 0$ であるから

$$|a|-|b| < |a+b|$$

[1], [2] から $|a|-|b| \leq |a+b|$ **終**

注意 等号が成り立つのは、 $|a|-|b|\geq 0$ かつ $|ab|=-ab$ 、すなわち $|a|\geq |b|$ かつ $ab\leq 0$ のときである。

両辺がともに 0 以上であるという条件がないと、「両辺を平方して証明する」という方法は使えないので注意しよう。



6. 次の等式, 不等式を証明せよ。

$$(1) (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

$$(2) a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

指針 等式・不等式の証明

(1) 左辺を変形して, 右辺を導く。

(2) 左辺-右辺 ≥ 0 を証明する。このとき, (1)の結果を利用する。

解答 (1) 左辺 $= a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2$
 $= 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

よって

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \quad \text{終}$$

(2) (1)より

$$\frac{1}{2}\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$$

であるから

$$a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$$

$$= \frac{1}{2}\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} \geq 0$$

よって $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ 終

注意 (2) 等号が成り立つのは, $a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$
すなわち $a=b=c$ のときである。

7. $a>0$, $b>0$ のとき, 次の不等式を証明せよ。

$$(1) ab + \frac{16}{ab} \geq 8$$

$$(2) \left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right) \geq 9$$

指針 相加平均・相乗平均と不等式の証明 相加平均と相乗平均の大小関係

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (a>0, b>0) \text{ を, } a+b \geq 2\sqrt{ab} \text{ の形で利用する。}$$

(2) まず, 左辺を展開し, 文字の項についてこの関係を用いる。

解答 (1) $ab>0$, $\frac{16}{ab}>0$ であるから, 相加平均と相乗平均の大小関係により

$$ab + \frac{16}{ab} \geq 2\sqrt{ab \cdot \frac{16}{ab}} = 2\sqrt{16} = 2 \cdot 4 = 8$$

よって $ab + \frac{16}{ab} \geq 8$ 終

(2) 左辺を展開すると

$$\begin{aligned}\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right) &= ab + a \cdot \frac{4}{a} + \frac{1}{b} \cdot b + \frac{1}{b} \cdot \frac{4}{a} \\ &= ab + \frac{4}{ab} + 5\end{aligned}$$

 $ab > 0$, $\frac{4}{ab} > 0$ であるから, 相加平均と相乗平均の大小関係により

$$ab + \frac{4}{ab} \geq 2\sqrt{ab \cdot \frac{4}{ab}} = 2\sqrt{4} = 2 \cdot 2 = 4$$

$$\text{よって } \left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right) = ab + \frac{4}{ab} + 5 \geq 4 + 5 = 9 \quad \text{終}$$

補足 等号が成り立つのは次のときになる。

$$(1) \quad ab + \frac{16}{ab} = 8, \quad ab = \frac{16}{ab} \quad \text{から} \quad ab = \frac{16}{ab} = \frac{8}{2}, \quad \text{すなわち, } ab = 4 \text{ のとき。}$$

$$(2) \quad ab + \frac{4}{ab} = 4, \quad ab = \frac{4}{ab} \quad \text{から} \quad ab = \frac{4}{ab} = \frac{4}{2}, \quad \text{すなわち, } ab = 2 \text{ のとき。}$$

第1章 章末問題B

教 p.38

8. 次の問いに答えよ。

- (1) $8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$ を因数分解せよ。
 (2) $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$ であることを用いて、
 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ を因数分解せよ。

指針 3次式の因数分解

- (1) 与式を $(8x^3 - y^3) - 12x^2y + 6xy^2$ のように式変形して、まず、 $\underline{\hspace{1cm}}$ の部分と $\underline{\hspace{1cm}}$ の部分でそれぞれ因数分解をする。
 (2) $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$ から $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ は $(x+y+z)$ でくくれる。

解答

- (1) $8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$
 $= (8x^3 - y^3) - 12x^2y + 6xy^2$
 $= (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2) - 6xy(2x - y)$
 $= (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2 - 6xy)$
 $= (2x - y)(4x^2 - 4xy + y^2) = (2x - y)^3$ 答
 (2) $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$ であるから
 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$
 $= (x+y)^3 - 3xy(x+y) + z^3 - 3xyz$
 $= (x+y)^3 + z^3 - 3xy(x+y) - 3xyz$
 $= \{(x+y) + z\}\{(x+y)^2 - (x+y)z + z^2\} - 3xy(x+y+z)$
 $= (x+y+z)\{(x+y)^2 - (x+y)z + z^2 - 3xy\}$
 $= (x+y+z)(x^2 + 2xy + y^2 - xz - yz + z^2 - 3xy)$
 $= (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ 答

【参考】(1) の式は、展開の公式 $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ の右辺の式において、
 $a \rightarrow 2x$, $b \rightarrow y$ とおき換えたものになっている。これに気付けば、次のように計算できる。

別解

- (1) $8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$
 $= (2x)^3 - 3(2x)^2y + 3(2x)y^2 - y^3$
 $= (2x - y)^3$ 答

9. 次の式を計算せよ。

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2}$$

指針 分数式の加法 3つの分数式の分母に共通因数がないから、それらの積を分母として通分する。まず、最初の2つの分数式の通分から始める。

$$\begin{aligned} \text{解答} \quad & \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} = \frac{1+x}{(1-x)(1+x)} + \frac{1-x}{(1-x)(1+x)} + \frac{2}{1+x^2} \\ & = \frac{(1+x)+(1-x)}{(1-x)(1+x)} + \frac{2}{1+x^2} = \frac{2}{1-x^2} + \frac{2}{1+x^2} \\ & = \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)(1+x^2)} + \frac{2(1-x^2)}{(1-x^2)(1+x^2)} = \frac{2(1+x^2)+2(1-x^2)}{(1-x^2)(1+x^2)} \\ & = \frac{4}{1-x^4} \quad \text{答} \end{aligned}$$

10. x についての多項式 ax^3+bx^2+2x+1 を x^2+x-2 で割ると、余りが $2x+5$ となるように、定数 a, b の値を定めよ。また、そのときの商を求めよ。

指針 等式 $A=BQ+R$ の利用, 恒等式の性質 割る式は2次式であるから、商は1次式となる。これを $cx+d$ とおく。それぞれの多項式を $A=BQ+R$ に代入して得られる等式を恒等式とみて、両辺の係数を比べて a, b, c, d の値を求める。

解答 商を $cx+d$ とおくと

$$ax^3+bx^2+2x+1=(x^2+x-2)(cx+d)+2x+5$$

右辺を計算して、 x について整理すると

$$ax^3+bx^2+2x+1=cx^3+(c+d)x^2+(-2c+d+2)x-2d+5$$

この等式は x についての恒等式であるから、両辺の同じ次数の項の係数は等しく

$$a=c, \quad b=c+d, \quad 2=-2c+d+2, \quad 1=-2d+5$$

これを解いて $a=1, b=3, c=1, d=2$

よって $a=1, b=3$, 商 $x+2$ 答

教 p.38

11. 等式 $(k+2)x + (k+1)y - 3k - 4 = 0$ が、 k のどのような値に対しても成り立つように、 x, y の値を定めよ。

指針 恒等式の性質 「 k のどのような値に対しても成り立つ」から、 k についての恒等式と考える。まず、左辺を k について整理する。

$$ak + b = 0 \text{ が } k \text{ についての恒等式である} \iff a = b = 0$$

解答 等式の左辺を k について整理すると

$$(x+y-3)k + (2x+y-4) = 0$$

この等式は k についての恒等式であるから、係数はすべて 0 で

$$x+y-3=0, \quad 2x+y-4=0$$

これを解いて $x=1, y=2$ 答

教 p.38

12. $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$, $x+y+z=24$ のとき、 x, y, z の値を求めよ。

指針 比例式と等式を同時に満たす文字の値 比例式を $=k$ とおき、まず k の値を求める。

解答 $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} = k$ とおくと $x=k, y=2k, z=3k$

これらを $x+y+z=24$ に代入すると

$$k+2k+3k=24 \quad 6k=24 \quad k=4$$

よって $x=4, y=2 \times 4=8, z=3 \times 4=12$ 答 $x=4, y=8, z=12$

教 p.38

13. 二項定理を用いて、次のことを証明せよ。

$x > 0$ のとき $(1+x)^n > 1+nx$ ただし、 n は 2 以上の自然数

指針 二項定理の応用 二項定理により

$$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + \cdots + {}_nC_nx^n$$

が成り立つ。この等式を利用して、不等式を証明する。

解答 二項定理により

$$\begin{aligned} (1+x)^n &= {}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + \cdots + {}_nC_nx^n \\ &= 1 + nx + ({}_nC_2x^2 + \cdots + {}_nC_nx^n) \end{aligned}$$

よって $(1+x)^n - (1+nx) = {}_nC_2x^2 + \cdots + {}_nC_nx^n$

${}_nC_r > 0, x > 0$ より、 ${}_nC_2x^2 + \cdots + {}_nC_nx^n > 0$ であるから

$$(1+x)^n - (1+nx) > 0 \quad \text{すなわち} \quad (1+x)^n > 1+nx \quad \text{終}$$

14. $a > b > 0$, $a + b = 1$ のとき, 次の数を大きい順に並べよ。

$$\frac{1}{2}, \quad 2ab, \quad a^2 + b^2$$

指針 実数の大小関係 まず, 2つの条件 $a > b > 0$, $a + b = 1$ を満たす数 a , b を代入して, 大小の見当をつける。たとえば, $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{3}$ とすると

$$2ab = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9} < \frac{1}{2}, \quad a^2 + b^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} > \frac{1}{2}$$

となるから, $a^2 + b^2 > \frac{1}{2} > 2ab$ であると考えられる。これを証明する。

$a + b = 1$ を用いて b を消去し, 実数の平方の性質を用いる。

解答 $a + b = 1$ であるから $b = 1 - a$

$a > b > 0$ から $a > 1 - a > 0$

これを解くと $\frac{1}{2} < a < 1$ $\leftarrow a > 1 - a$ より $a > \frac{1}{2}$, $1 - a > 0$ より $a < 1$

このとき $a^2 + b^2 - \frac{1}{2} = a^2 + (1 - a)^2 - \frac{1}{2} = 2a^2 - 2a + \frac{1}{2}$

$$= 2\left(a^2 - a + \frac{1}{4}\right) = 2\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 > 0$$

$$\frac{1}{2} - 2ab = \frac{1}{2} - 2a(1 - a) = 2a^2 - 2a + \frac{1}{2}$$

$$= 2\left(a^2 - a + \frac{1}{4}\right) = 2\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 > 0$$

よって $a^2 + b^2 > \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} > 2ab$

したがって, 大きい順に並べると $a^2 + b^2$, $\frac{1}{2}$, $2ab$ 答

別解 $a > b$ から, $a^2 \neq b^2$ である。このとき, 相加平均と相乗平均の大小関係により

$$a^2 + b^2 > 2\sqrt{a^2 b^2} \quad \leftarrow a^2 \neq b^2 \text{ から, 等号は成立しない。}$$

すなわち $a^2 + b^2 > 2ab$ …… ①

ここで, $a + b = 1$ から $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 1 - 2ab$ …… ②

であるから, ① より $1 - 2ab > 2ab$ $ab < \frac{1}{4}$

よって, $2ab < \frac{1}{2}$ …… ③ であり, このとき, $-2ab > -\frac{1}{2}$ であるから,

② より $a^2 + b^2 > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ …… ④

③, ④ から, 大きい順に並べると $a^2 + b^2$, $\frac{1}{2}$, $2ab$ 答